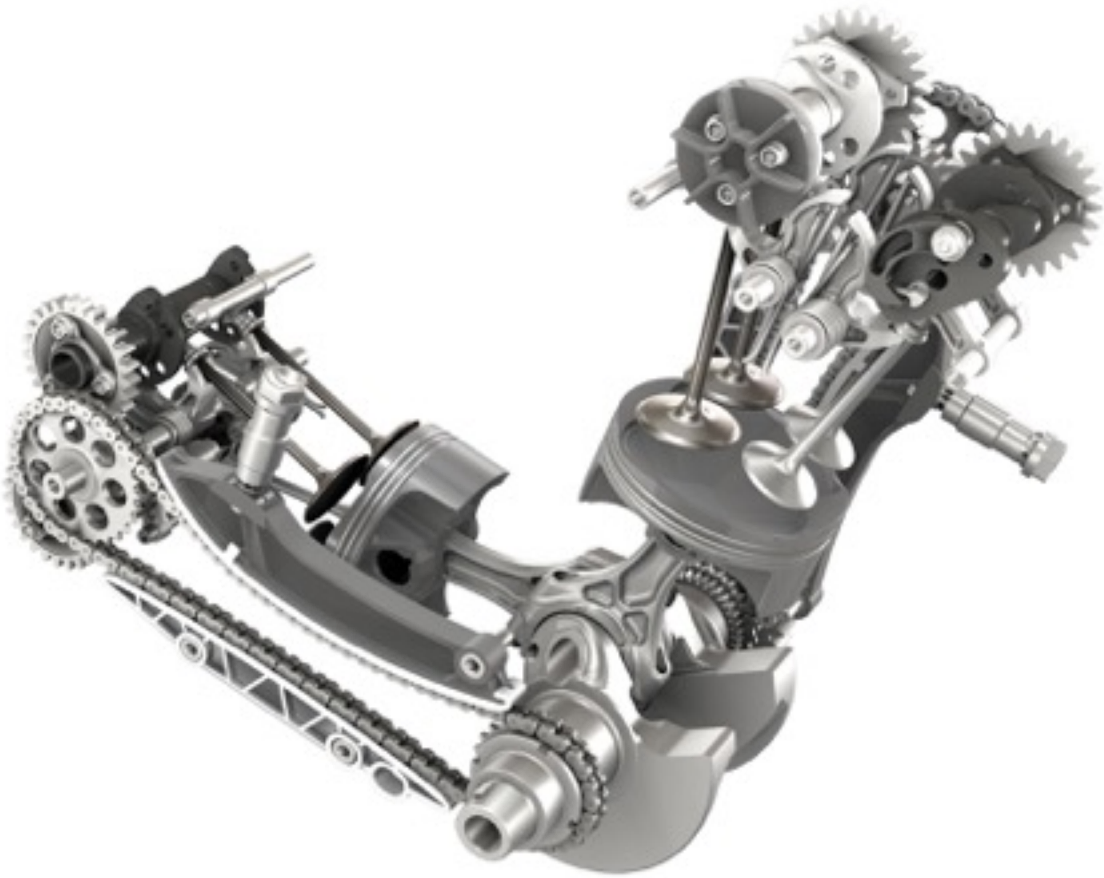
Cinemática y Dinámica



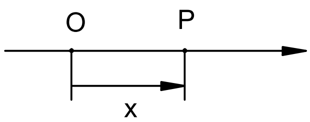
Academia Universitaria Guillermo Soler

- Ingeniería e Idiomas -

Cinemática

1. Movimiento Rectilíneo.

Velocidad y aceleración de un movimiento rectilíneo (Método analítico).



Posición de una partícula en mov. rectilíneo.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$$

Movimiento rectilíneo uniforme.

$$x = x_0 + vt$$

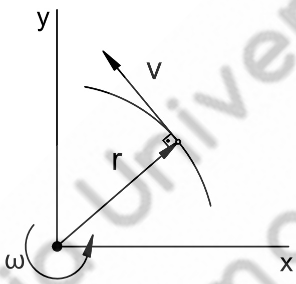
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

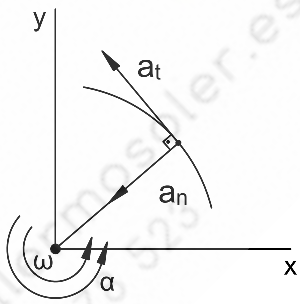
$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

2. Componentes Tangencial y Normal (Intrínsecas)





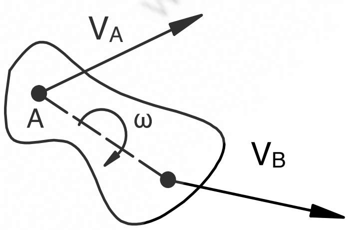
$$v = \omega \times r$$

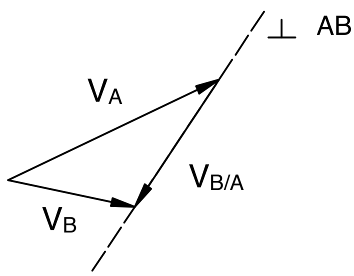
$$a = a_t + a_n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_t = \alpha \times r \\ a_n = \omega^2 r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_t = \alpha r$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

3. Método de Superposición (traslación más rotación).

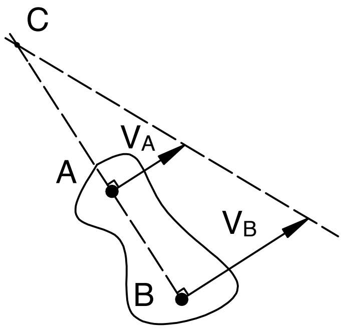




$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

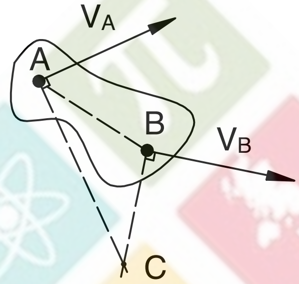
$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

4. Centros Instantáneos de Rotación.

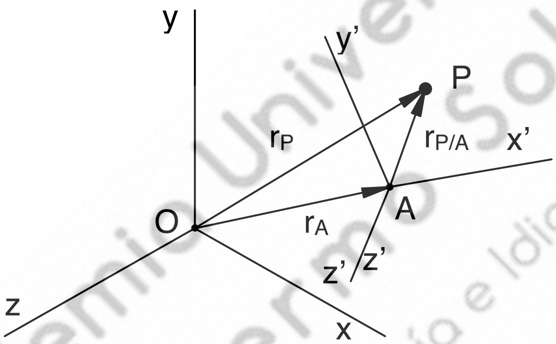


$$\omega = \frac{v_A}{AC}$$

$$\omega = \frac{v_B}{BC}$$



5. Movimiento Relativo.



$$r_{abs(P)} = r_{arr(A)} + r_{rel(P/A)}$$

$$v_{abs} = v_{arr} + v_{rel}$$

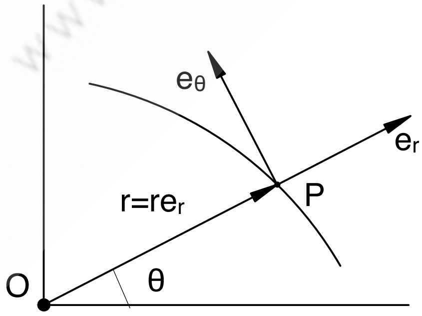
V_{abs}= velocidad absoluta.

V_{arr} = velocidad arrastre.

V_{rel} = velocidad relativa.

$$a_{abs} = a_{arr} + a_{rel} + a_{cor} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{arr} = (a_{arr})_n + (a_{arr})_t \\ a_{rel} = (a_{rel})_n + (a_{rel})_t \\ a_{cor} = 2\omega_{arr} \times v_{rel} \end{cases}$$

6. Coordenadas Polares.



$$v = (\dot{r})\, e_r + (r\dot{\theta})\, e_\theta \;=\; (v_r)\, e_r + (r\omega)\, e_\theta \;=\; (v_r)\, e_r + (v_\theta)\, e_\theta$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, e_\theta = (a_t - r\omega^2)\, e_r + (r\alpha + 2v_r\omega)\, e_\theta$$

Cinética

1. Segunda ley de Newton.

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es 0, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud resultante.

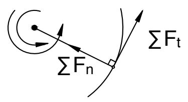
$\sum F = ma$ definiendo fuerza como $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

La velocidad es cte. pero la masa varía con el tiempo: $F = \dot{m}v = \dfrac{dm}{dt}v$

Fuerza de rozamiento: $F_r = \mu ma$

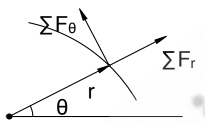
Equilibrio dinámico se define como: $\sum F - ma = 0$

2. Ecuaciones de movimiento en coordenadas.



Intrínsecas.

$$\sum F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \sum F_n = m\frac{v^2}{r}$$



Polares.

$$\sum F_r = ma_r \qquad \sum F_\theta = ma_\theta$$

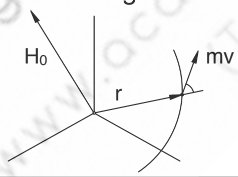
Cartesianas $\sum(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$

3. Cantidad de movimiento.

La resultante de las fuerzas que actúan es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento.

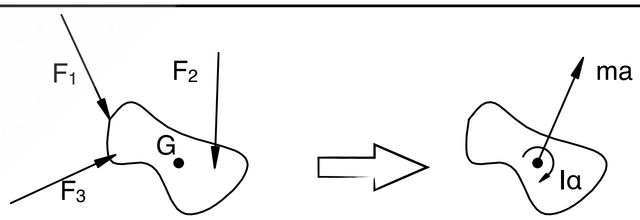
$$\sum F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) \quad \Rightarrow \quad L = mv \quad \Rightarrow \quad \sum F = \dot{L}$$

Cantidad de movimiento angular:



$$H_o = r \times mv$$

4. Movimiento Plano de un cuerpo rígido.



$$\sum M_G + [r \times (-ma)] + (-I\alpha) = 0$$

5. Principio de impulso y cantidad de movimiento.

El impulso lineal aplicado a un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual a su cantidad de movimiento.

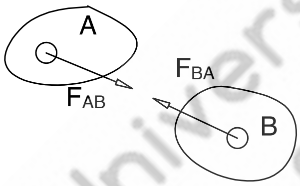
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F \, dt = mv_2 - mv_1$$

También se puede expresar como promedio.

$$(t_1 - t_2) \sum F_{media} = mv_2 - mv_1$$

6. Conservación de la cantidad de movimiento lineal.

Si dos cuerpos no están sujetos a fuerzas externas que no sean las que se ejerzan entre si, su cantidad de movimiento se conserva.



$$mv_A + mv_B = cte.$$

7.Impactos.

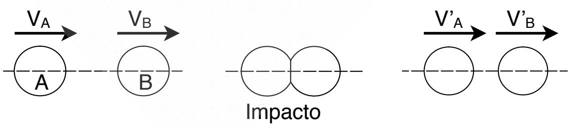
La cantidad de movimiento debe ser la misma antes y después del impacto.

Si los cuerpos permanecen adheridos después de la colisión, se trata de un impacto perfectamente plástico. La velocidad resultante viene determinada por:

$$v = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

8.Impactos centrales.

- Central directo:

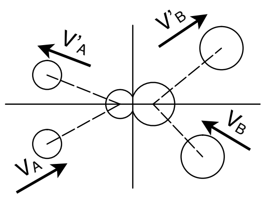


$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

- Central oblicuo:

*(y,z no varían con el impacto)



$$m_A (v_A)_x + m_B (v_B)_x = m_A (v'_A)_x + m_B (v'_B)_x$$

$$e = \frac{(v'_B)_x - (v'_A)_x}{(v_A)_x - (v_B)_x}$$

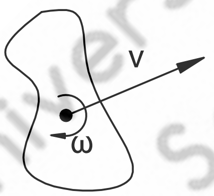
9. Trabajo y potencia.

- Trabajo de una Fuerza: $dU = |F|\,ds \quad \Rightarrow \quad U = \int_{s_0}^{s_1} |F|\,ds$
- Trabajo de un momento par: $U = \int_{\theta_0}^{\theta_1} M\,d\theta$
- Potencia: $Pot. = P = \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{F \cdot dr}{dt} = Fv \qquad P = E/t$
- Potencia de un par: $P = \dfrac{M d\theta}{dt} = M\omega$
- Rendimiento / Eficiencia: $\eta = \dfrac{Salida}{Entrada}$

10. Energía cinética.

- Energía cinética de una partícula: $E_C = T = \dfrac{1}{2} m v^2$

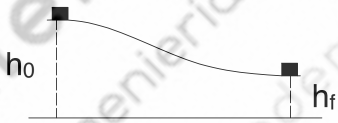
- Energía cinética en movimiento plano:



$$E_C = T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

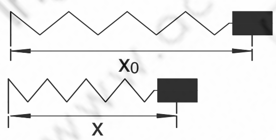
11. Energía potencial.

- Energía potencial de una partícula:



$$E_P = V = mg(h_f - h_o)$$

- Energía potencial de un muelle:



$$E_{Pm} = V = \frac{1}{2} k (x - x_o)^2$$

12. Conservación de la Energía.

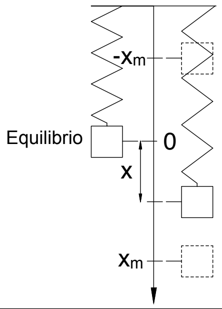
Cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la energía cinética y la energía potencial de la partícula permanece constante.

$$E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{p2}$$

Vibraciones

1. Vibración Libre.

Ec. Diferencial $\Rightarrow \quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \xrightarrow[\text{frecuencia Natural}]{\text{Siendo la}} \omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}} \xrightarrow{\text{Nos da}} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega_n^2x=0$



Desplazamiento $\Rightarrow \quad x=x_m\sin(\omega_n t+\phi) \quad \Rightarrow \begin{cases}\phi=\text{ángulo de desfase}\\ x_m=\text{amplitud}\end{cases}$

Periodo $=\tau_n=\dfrac{2\pi}{\omega_n}$ Velocidad $\Rightarrow \quad v_m=x_m\omega_n$

Frecuencia $=f=\dfrac{1}{\tau_n}$ Aceleración $\Rightarrow a_m=x_m\omega_n^2$

2. Vibración Forzada.

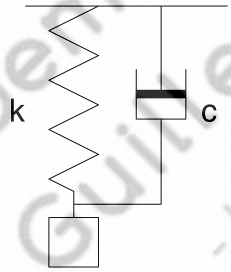
Ec. Diferencial $\Rightarrow \quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=P_m\sin\omega_f t \xrightarrow{\text{En función del desplazameinto}} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=k\delta_m\sin\omega_f t$

Frecuencia Circular Forzada $=\omega_f$

Desplazamiento $=\delta=k\delta_m\sin\omega_f t$

Factor de Amplificación $=\dfrac{x_m}{P_m/k}=\dfrac{x_m}{\delta_m}=\dfrac{1}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$

3. Vibración amortiguadas.



Ec. Diferencial $\Rightarrow \quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=0$

Coeficiente de amortiguamiento $=c$

Sobreamortiguamiento $\Rightarrow \quad c>c_c$

Amortiguamiento crítico $\Rightarrow \quad c=c_c$

Subamortiguamiento $\Rightarrow \quad c<c_c$

Coef. amortiguamiento crítico $\Rightarrow \quad c_c=2m\sqrt{k/m}=2m\omega_n$

4. Vibraciones forzadas amortiguadas.

El movimiento del sistema se define mediante la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=P_m\sin\omega_f t$$

La vibración de estado estable del sistema se representa mediante una solución particular de la ecuación de desplazamiento:

$$x_{part}=x_m\sin(\omega_f t-\varphi)$$

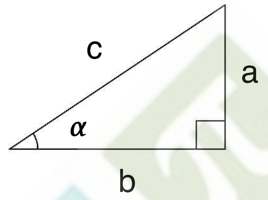
Apéndice

1. Trigonometría.

- Razones Trigonométricas

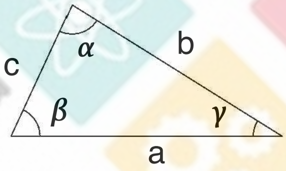
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



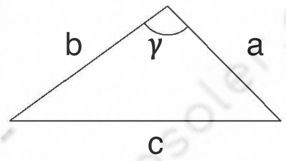
- Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



- Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



2. Álgebra Vectorial.

- Vector Unitario:

$$\lambda_{OE} = \frac{\overrightarrow{OE}}{\left|OE\right|} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}$$

Proyección de un vector sobre el eje OE $\Rightarrow$ $P_{OE} = P \bullet \lambda_{OE}$

- Producto Vectorial:

$$V = P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

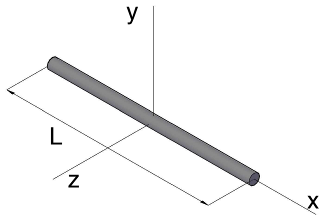
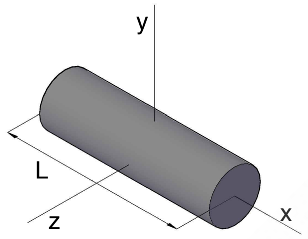
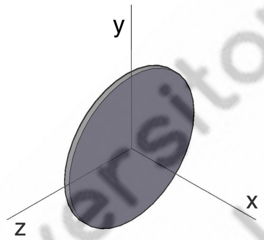
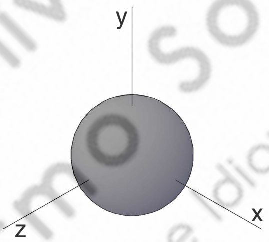
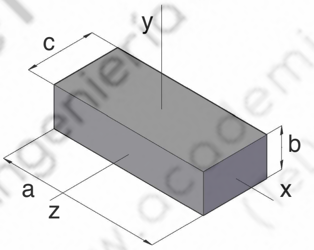
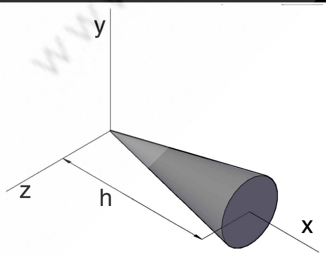
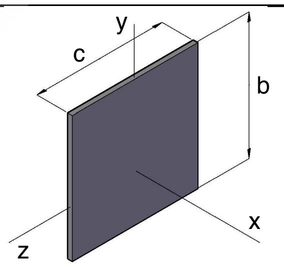
$$\begin{array}{lll} i \times i = 0 & j \times i = -k & k \times i = j \\ i \times j = k & j \times j = 0 & k \times j = -i \\ i \times k = -j & j \times k = i & k \times k = 0 \end{array}$$

- Producto Escalar:

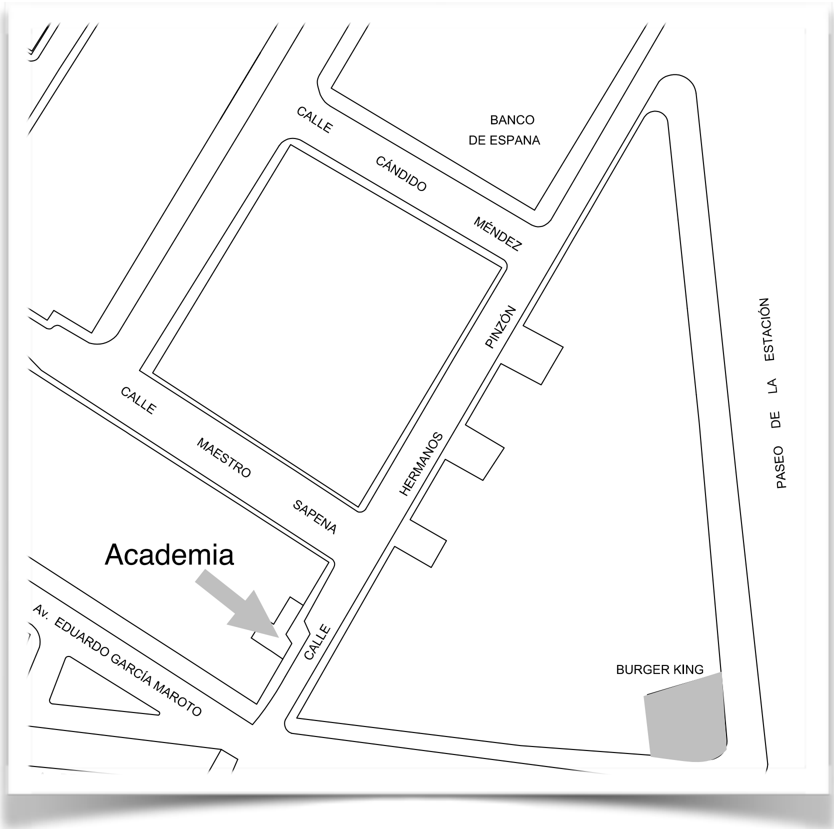
$$P \bullet Q = PQ\cos\theta$$

$$\begin{array}{lll} i \bullet i = 1 & j \bullet j = 1 & k \bullet k = 1 \\ i \bullet j = 0 & j \bullet k = 0 & k \bullet i = 0 \end{array}$$

Momentos de inercia de masas.

Barra Ligera		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Cilindro rectangular		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3r^2 + L^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m\left(\frac{1}{4} r^2 + h^2\right)$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$

Ciencia Ingeniería Matemáticas Idiomas



C/ Hermanos Pinzón Núm. 1, 1º Izq - Jaén

Tel. 609 47 85 23

e-mail: academia.guillermo.soler@gmail.com

www.academiaguillermosoler.es